Lösungshinweise für den Hauptwettbewerb am 14. März 2013

Aufgabe 1 - *Bien vu* - 7 Punkte -

Würde Anatole zwei grüne Hüte sehen, wüsste er, dass sein Hut rot ist. Anatole sieht also höchstens einen grünen Hut. Sähe nun Michel, dass Thomas‘ Hut grün ist, wüsste er daher sofort, dass sein Hut rot sein muss (denn sonst hätte Anatole „ja“ gesagt). Da Michel das aber nicht weiß (er hat „nein“ gesagt), schließt Thomas daraus, dass sein eigener Hut nicht grün, sondern rot ist.

Aufgabe 2 - *Mathemagisch* - 5 Punkte -

In der gegebenen Tabelle ist die Summe von 3 Zahlen mit der genannten Vorgabe immer 27.
Beim Ausfüllen der Tabelle kann man mit einer Diagonalen beginnen. Ergänzt man dann z.B. die erste Zeile durch zwei frei gewählte Zahlen, so sind alle weiteren Zahlen festgelegt. Eventuell muss eine dieser beiden Zahlen noch geändert werden, damit alle Tabellenwerte verschieden sind.
Die Tabelle hat die Eigenschaft, dass sich untereinander stehende Zahlen zweier Zeilen stets um denselben Wert unterscheiden. Diese Eigenschaft, die übrigens auch entsprechend für die Spalten gilt, kann zur Lösungskontrolle verwendet werden.

5	8	10
	15	
		20

→

5	8	11	
12	**15**	18	+7
14	17	**20**	+2

Aufgabe 3 - *Supervoll* - 7 Punkte -

Es ergeben sich 2 Grenzfälle:

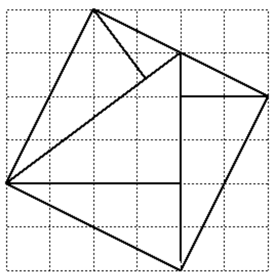
a) Das zweite Rechteck ist gerade eben weiß geworden. Die Strecke von 252,6 km wurde mit 2/6 der Tankfüllung zurückgelegt. Bis zum Aufblinken des letzten Rechtecks stehen noch höchstens 3/6 der Tankfüllung zur Verfügung. Damit kann man höchstens $1{,}5 \cdot 252{,}6$ km = 378,9 km fahren.

b) Das dritte Rechteck ist gerade noch nicht weiß geworden. Für die Strecke von 256,6 km wurde also die Hälfte (3/6) der Tankfüllung benötigt. Bis zum Reservesignal stehen jetzt noch mindestens 2/6 der Tankfüllung zur Verfügung. Sie reichen für mindestens $2/3 \cdot 252{,}6$km = 168,4 km.

Es lässt sich also schlussfolgern, dass man unter den gegebenen Bedingungen **mindestens 168,4 km und höchstens 378,9 km** fahren kann.

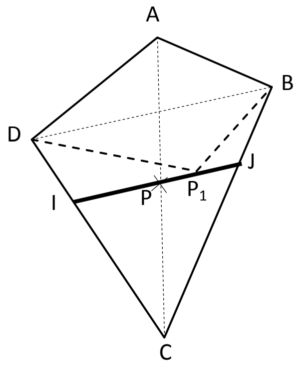
Aufgabe 4 - *Triangram* - 5 Punkte -

Aus dem Flächeninhalt aller Dreiecke ergibt sich für das Quadrat eine Seitenlänge von $\sqrt{20}$ cm. Diese Länge findet man auch bei der Hypotenuse des Dreiecks mit den Kathetenlängen 2 cm und 4 cm.
Man kann die Lösung aber auch durch reines Ausprobieren finden.



Mathématiques sans Frontières

Aufgabe 5 – *Teilung, Gleichheit, Brüderlichkeit* - 7 Punkte -



Man verwendet folgende Eigenschaft: Zwei Dreiecke mit gleich langer Grundseite und gleich langer Höhe haben den gleichen Flächeninhalt.
Peters Vorschlag: P ist der Mittelpunkt der Diagonalen AC.
Dann haben sowohl die Dreiecke ADP und DCP als auch die Dreiecke APB und CBP den gleichen Flächeninhalt. Daraus folgt, dass auch die Vierecke ADPB und DCBP flächengleich sind.
Pauls Vorschlag: Bei allen Lösungen liegt P auf der Strecke [IJ] im Inneren des Vierecks DCBA, die durch den Mittelpunkt von [AC] geht und parallel zu [DB] ist.
Erklärung:
Sei P_1 ein Punkt dieser Strecke. Der Flächeninhalt des Dreiecks BDP_1 ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks BDP (gemeinsame Grundseite und gleiche Höhe). Also ist auch der Flächeninhalt des Vierecks ADP_1B gleich dem des Vierecks ADPB, also die Hälfte des Flächeninhalts des Vierecks DCBA.

Aufgabe 6 – *Des einen Leid, des andern Freud'* - 5 Punkte -

Betrachtet man das Spiel umgekehrt, so gibt es bei jeder Runde nur eine Möglichkeit (es gibt jeweils nur eine ungerade Zahl). Man kann mithilfe einer Tabelle vorgehen:

	Alex	Claudius	Sam	
Ende der 5. Runde	10	9	8	
Ende der 4. Runde	5	18	4	Claudius verliert
Ende der 3. Runde	16	9	2	Alex verliert
Ende der 2. Runde	8	18	1	Claudius verliert
Ende der 1. Runde	4	9	14	Sam verliert
Beginn der 1. Runde	**2**	**18**	**7**	Claudius verliert

Aufgabe 7 – *Paso Doble* - 7 Punkte -

Annahme: 1a sei richtig.
Dann hat die gesuchte Zahl zwei Ziffern und ist ungerade (da 1b in diesem Fall falsch ist). Außerdem ist sie eine Quadratzahl (2a ist richtig, denn 2b ist falsch, da die gesuchte Zahl zwei Ziffern hat). Die ungeraden Quadratzahlen mit zwei Ziffern sind 25; 49 und 81, jedoch erfüllt keine dieser Zahlen die Bedingungen 3a oder 3b.
→ Widerspruch, unsere Annahme ist falsch.

Folglich ist 1b richtig: die gesuchte Zahl ist gerade. Sie kann damit nicht das Produkt zweier aufeinander folgender ungerader Zahlen sein, 4a ist also falsch. Damit ist 4b wahr: die Zahl ist gleich einer Quadratzahl plus 1. Sie kann dann keine Quadratzahl sein, daher ist 2a falsch und 2b wahr und die Zahl besteht aus drei Ziffern. Die Zahlen, die nunmehr in Frage kommen, sind:

$11^2+1=122$	$19^2+1=362$	$27^2+1=730$
$13^2+1=170$	$21^2+1=442$	$29^2+1=842$
$15^2+1=226$	$23^2+1=530$	$31^2+1=962$
$17^2+1=290;$	$25^2+1=626$	

Da alle diese Zahlen gerade sind, besitzen sie mehr als zwei Teiler, also ist 3b falsch und 3a wahr: die gesuchte Zahl enthält eine 7. Es kommen also nur 170 und 730 in Frage. Keine dieser beiden Zahlen ist durch 11 teilbar, also ist 5a falsch und 5b muss wahr sein, was auch der Fall ist: $730=9^3+1$

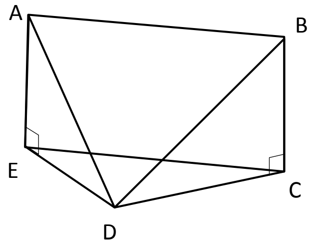
Die gesuchte Zahl ist 730.
Selbstverständlich gibt es für diese Lösung auch andere Herangehensweisen!

Aufgabe 8 - *Bonnie und Clyde* - 5 Punkte -

Die Gesamtpunktzahl der 15 Kugeln ist 120. Clyde hat also 40 Punkte und Bonnie hat 80 Punkte erreicht. Die Gesamtpunktzahl der 6 höchsten Kugeln ist 75; Bonnie hat also mindestens 7 Kugeln eingelocht. Um jedoch mit weniger Kugeln als Clyde zu gewinnen, darf sie höchstens 7 Kugeln haben. Bonnie hat also mit genau 7 Kugeln gewonnen.
Mit den sechs höchsten Kugeln erhält man 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 5 = 80.
Erhöht man nun der Wert der letzten Kugel und vermindert gleichzeitig den Wert einer der vorstehenden Kugeln, so ergeben sich vier weitere Möglichkeiten:

15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 9 + 6 = 80
15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 8 + 7 = 80
15 + 14 + 13 + 12 + 10 + 9 + 7 = 80
15 + 14 + 13 + 11 + 10 + 9 + 8 = 80

Aufgabe 9 - *Auf schrägen Pfaden* - 7 Punkte -



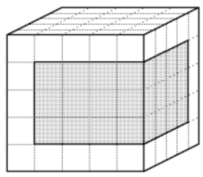
Lily kommt in A an. AE = BC = 5 m (Höhe des Deichs).
Wenn BDA 45° misst, so ist das Dreieck ADB wegen des rechten Winkels bei B gleichschenklig und und es gilt AB = BD = 10 m.
Nach Pythagoras ist AD = $10\sqrt{2}$ und das Neigungsverhältnis ist somit
$\frac{AE}{AD} = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}353 =$ **35 %**.

Wenn das Neigungsverhältnis hingegen 25 % betragen soll, so ist $\frac{AE}{AD} = 0{,}25$ und damit AD = $\frac{5}{0{,}25} = 20$ m.

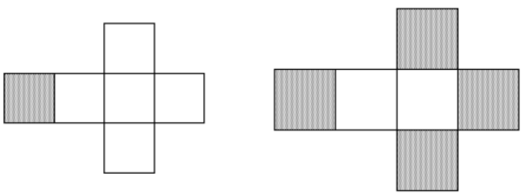
Aus einer maßstabsgetreuen Dreieckskonstruktion oder aber aus cos(BDA)= $\frac{10}{20}$ erhält man BDA = 60°.

Aufgabe 10 - *Farblos* - 10 Punkte -

Der große Würfel muss aus mehr als 48 kleinen Würfeln bestehen.

- ✓ **<u>Erste Möglichkeit</u>: 4 kleine Würfel pro Kante und damit 64 kleine Würfel insgesamt.**
  Ist eine Fläche des großen Würfels angemalt (beispielsweise die Unterseite des Würfels), haben 64 - 16 = 48 kleine Würfel keine einzige bemalte Fläche.
- ✓ **<u>Zweite Möglichkeit</u>: 5 kleine Würfel pro Kante und damit 125 kleine Würfel insgesamt.**
  Sind nur zwei **benachbarte** Flächen des großen Würfels nicht angemalt, so haben 4·4·3 = 48 kleine Würfel keine einzige bemalte Fläche (siehe Zeichnung rechts, dargestellt durch die graue Schraffierung).
  
  Sind die beiden unbemalten Flächen nicht benachbart sondern liegen sich gegenüber, so sind 3·3·5 = 45 kleine Würfel unbemalt.
  Bei mehr als zwei unbemalten Flächen erhält man mehr als 48 unbemalte Würfel.

Ist die Anzahl der Würfel pro Kante größer als 5, so ist bei sechs bemalten Flächen des großen Würfels die Anzahl der unbemalten kleinen Würfel bereits größer als 48.
Hier zwei mögliche Würfelnetze:

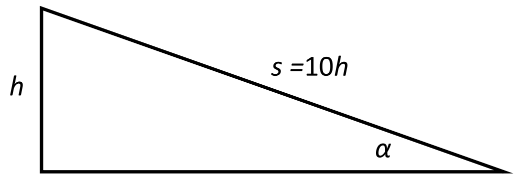


Aufgabe 11 – *Wer schreibt?* - 5 Punkte –

Eine Frau hat zu ihrer Rechten entweder eine Frau oder einen Mann. Es gibt also insgesamt 7 + 12 = 19 Frauen.
Zwölf Frauen haben einen Mann zu ihrer Rechten. Da die Teilnehmer im Kreis sitzen, folgt auf jeden Mann, der rechts von einer Frau sitzt, gleich oder später wieder eine Frau, die rechts von einem Mann sitzt.
Also gibt es zwölf Männer, die eine Frau zu ihrer Rechten haben.
Da der Anteil dieser Männer 3/4 aller anwesenden Männer ausmacht, sind 16 Männer und damit insgesamt 19 + 16 = 35 Personen anwesend.
Die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig eine Frau ausgewählt wird, beträgt daher 19/35.

Aufgabe 12 – *Horizontaler Abstieg* - 7 Punkte -

Der Umfang der Räder beträgt 10 cm$\cdot\pi$, der Umfang der Achse 1 cm$\cdot\pi$. Wenn also die Räder, und mit ihnen die Achse, eine Umdrehung machen, so verkürzt sich die Schnur, an der das Gewicht hängt, um 1cm$\cdot\pi$.
Der von den Rädern zurückgelegte Weg *s* ist also 10-mal so groß wie die Längenänderung der Schnur.
Wenn das Gewicht während der Bewegung stets auf gleicher Höhe bleiben soll, müssen die Verkürzung der Schnur und der Höhenverlust *h* des Gefährts in jedem Moment gleich sein. Es gilt also $s = 10\cdot h$.
Für den Neigungswinkel der schiefen Ebene gilt:
$\sin(\alpha) = h/s = 1/10$ und damit $\alpha = 5{,}7° \approx 6°$.
Die Größe des Winkels kann auch durch eine maßstabsgetreue Zeichnung ermittelt werden.



Aufgabe 13 - *Runde Sache* - 10 Punkte -

Ausgehend von der Zeichnung des Aufgabenblattes erhält man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras
$(x + 8)^2 + (y+8)^2 = (x + y +8)^2$, also
$x^2 + 16x + 64 + y^2 +16y + 64 = x^2 + y^2 + 64 + 2xy + 16x + 16y$
Man vereinfacht und erhält $64 = 2xy$, also $xy = 32$.
Für x und y (und damit für die Seitenlängen des Dreiecks) sind daher folgende Werte möglich:

x	y	Seitenlängen des Dreiecks
1	32	9 ; 40 ; 41
2	16	10 ; 24 ; 26
4	8	12 ; 16 ; 20